

间断伽辽金法(DGM)求解弹性地基梁问题

艾智勇, 王全胜, 王 熹

(同济大学 地下建筑与工程系 岩土及地下工程教育部重点实验室 上海 200092)

摘 要: 间断伽辽金法使用节点位移一类未知数作为测试函数, 削弱了内部单元边界上的一阶及 n 阶导数的连续性, 大大降低了构造形函数的难度, 特别适合控制方程为高阶微分方程问题的求解。基于间断伽辽金法的基本原理, 推导了弹性地基梁四阶微分控制方程的积分“弱”形式, 编制了计算程序, 进行了数值计算和收敛性分析。计算结果表明: 用间断伽辽金法求解弹性地基梁问题是十分有效率的。

关 键 词: 间断伽辽金法; 弹性地基梁; 连续性; 测试函数
中图分类号: TU 470 **文献标识码:** A

Discontinuous Galerkin method for elastic foundation beam problems

AI Zhi-yong, WANG Quan-sheng, WANG Xi

(Department of Geotechnical Engineering, Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Discontinuous Galerkin method(DGM) used node displacement approximations as trial functions, and weakened the continuity of first order and n -th order differential in the internal element boundary, reduced the difficulty to construct the shape functions, so this method is especially fit for solving the problem of higher order differential equation. Based on the principle of DGM, the integral weak form of the forth order differential control equation of elastic foundation beam is established. Numerical calculation and convergence analysis are carried out by the computer program. The results of calculation show that it is efficient for DGM to solve the elastic foundation beam problems.

Key words: discontinuous Galerkin method; elastic foundation beam; continuity; trial functions

1 引 言

间断伽辽金法(DGM)是有限单元法的一支, 是使用完全不连续的分段多项式作为数值解以及测试函数的一种有效的数值方法。间断伽辽金法(DGM)最初由 Reed 和 Hill^[1]在 1973 年提出, 用于解决中子的传送问题, 随后 Lesaint^[2]运用该方法对水平对流方程进行数值分析。间断伽辽金法(DGM)是使用完全不连续的分段多项式作为数值解以及测试函数的一种有效数值方法。DGM 最初由 Reed 和 Hill^[1]在 1973 年提出, 用于解决中子的传输问题。随后 Lesaint^[2]运用该方法对水平对流方程进行数值分析。而后, 该方法沉默了许多年, 直到 20 世纪 90 年代, 又成为解决流体力学和电磁问

题的比较流行的方法。在这方面, Cockburn 和 Shu^[3,4]建立了 Runge-Kutta DGM 的一阶非线性双曲线守恒法则, 并给出了部分收敛性理论证明。Bey 和 Oden^[5]建立了 hp-DGM, 并将它用于求解一阶导数问题。近年来, Engel^[7]等用连续/间断伽辽金法研究了结构和连续介质力学中的四阶椭圆形问题, 并将该法应用到薄板、梁和应变梯度弹性体等问题的分析中。

间断伽辽金法(DGM)的优势主要体现在:

(1) 与传统有限单元法相比, 其数值解在内部单元边界上可以不连续, 且不需要混合有限元中的辅助变量, 是一种具有稳定的收敛性的灵活方法。

(2) 对形函数和测试函数的选择方面更加简易, 能够构造高次的函数来描述应力和应变集中的现象, 从而避免了为了逼近真实解而不断细化单元

而增加的计算压力,并且具有较高的计算精度。

(3) 特别适合于解决与时间关联的问题,因为它的整体刚度矩阵是斜对角对称的,而且是非耦合的,同时它可以提供高阶精确的光滑解。

本文尝试用间断伽辽金法(DGM)求解控制方程为四阶微分方程的弹性地基梁问题。

2 DGM 积分“弱”形式

广义弹性地基梁的控制方程为

$$\left. \begin{aligned} (EI\phi_{,xx})_{,xx} &= -c\phi + f(x), \text{ in } \Omega \\ \phi &= g, \text{ on } \Gamma_g \\ \phi_{,x} &= h, \text{ on } \Gamma_h \\ EI\phi_{,xx} &= M, \text{ on } \Gamma_M \\ (EI\phi_{,xx})_{,x} &= Q, \text{ on } \Gamma_Q \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: x 为沿着梁的长度方向坐标; EI 为梁的抗弯刚度; ϕ 为梁的挠度; c 为单位梁宽时的地基反力系数; $f(x)$ 为作用在弹性地基梁上的荷载; g 、 h 、 M 、 Q 分别为给定边界上的挠度、转角、弯矩、剪力; Ω 为求解域; Γ_g 、 Γ_h 、 Γ_M 、 Γ_Q 分别为挠度、转角、弯矩和剪力的边界。

将弹性地基梁剖分为 N 个单元,在上式乘以 ω 后,进行分部积分,在任意的第 i 个单元中可得到:

$$\omega(EI\phi_{,xx})_{,xx} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \omega_{,x} EI\phi_{,xx} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_{,xx} EI\phi_{,xx} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega c \phi dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega f dx \quad (2)$$

式中: ω 为与 ϕ 具有相同特性的关于 x 的函数。

将各个单元在 Ω 上相加得到:

$$\sum_{\Omega} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_{,xx} EI\phi_{,xx} dx + \Pi_1 - \Pi_2 + \sum_{\Omega} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega c \phi dx = \sum_{\Omega} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega f dx \quad (3)$$

$$\text{其中: } \Pi_1 = \sum_{\Omega} \omega(EI\phi_{,xx})_{,x} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \quad (4)$$

$$\Pi_2 = \sum_{\Omega} \omega_{,x} EI\phi_{,xx} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \quad (5)$$

将式(4)右端展开得到:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \omega(EI\phi_{,xx})_{,x}(x_{1-}) - \omega(EI\phi_{,xx})_{,x}(x_0) + \\ &\quad \omega(EI\phi_{,xx})_{,x}(x_{2-}) - \omega(EI\phi_{,xx})_{,x}(x_{1+}) + \cdots + \\ &\quad \omega(EI\phi_{,xx})_{,x}(L) - \omega(EI\phi_{,xx})_{,x}(x_{(n-1)+}) \end{aligned} \quad (6)$$

考虑到剪力在单元交界处相等,即

$$\omega(EI\phi_{,xx})_{,x}(x_{i-}) = \omega(EI\phi_{,xx})_{,x}(x_{i+}) \quad (7)$$

则式(6)简化为

$$\Pi_1 = (EI\phi_{,xx})_{,x} \Big|_{\Gamma_Q} \quad (8)$$

将式(5)右端展开得到:

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \omega_{,x} EI\phi_{,xx}(x_{1-}) - \omega_{,x} EI\phi_{,xx}(x_0) + \\ &\quad \omega_{,x} EI\phi_{,xx}(x_{2-}) - \omega_{,x} EI\phi_{,xx}(x_{1+}) + \cdots + \\ &\quad \omega_{,x} EI\phi_{,xx}(L) - \omega_{,x} EI\phi_{,xx}(x_{(n-1)+}) \end{aligned} \quad (9)$$

记 $EI\phi_{,xx}(x_{\mp}) = \frac{1}{2}(EI\phi_{,xx}(x_+) + EI\phi_{,xx}(x_-))$, 用 $\langle EI\phi_{,xx}(x_{\mp}) \rangle$ 表示, 则式(9)可变为如下的形式:

$$\Pi_2 = \sum_{\Gamma} [\omega_{,x}(x)] \langle EI\phi_{,xx}(x) \rangle - \omega_{,x} EI\phi_{,xx}(0) + \omega_{,x} EI\phi_{,xx}(L) \quad (10)$$

式中: $[\omega_{,x}(x)] = \omega_{,x}(x_+) - \omega_{,x}(x_-)$; $\tilde{\Gamma}$ 为梁内部单元的边界。在式(2)右边加上 $EI\omega_{,xx}\phi_{,x}^h \Big|_{\Gamma_h}$, 相应地在右边增加 $EI\omega_{,xx}^h h \Big|_{\Gamma_h}$; 另外, 左式加上 $\sum_{\tilde{\Gamma}} [\phi_{,x}(x)] \cdot \langle \omega_{,xx}(x) \rangle$, 并将式(9)和式(10)代入, 得到弹性地基梁的 DGM 积分“弱”形式为

$$\begin{aligned} &\sum_{\Gamma} \{ [\omega_{,x}(x)] \langle EI\phi_{,xx}(x) \rangle + [\phi_{,x}(x)] \langle EI\omega_{,xx}(x) \rangle \} + \\ &\sum_{\Omega} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega c \phi dx + \left(\omega_{,x} EI\phi_{,xx} + \omega_{,xx} EI\phi_{,x}^h \right) \Big|_{\Gamma_h} + \\ &\sum_{\Omega} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_{,xx} EI\phi_{,xx} dx = EI\omega_{,x} M \Big|_{\Gamma_M} + EI\omega_{,xx}^h h \Big|_{\Gamma_h} + \\ &\sum_{\Omega} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega f dx - (EI\phi_{,xx})_{,x} \Big|_{\Gamma_Q} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\phi = g \quad \text{on } \Gamma_g \quad (12)$$

3 算例及收敛性分析

3.1 算例

如图 1 所示两端自由的弹性地基梁, 长度为 29 m, 宽度为 3 m, 梁的抗弯刚度为 1 545 700 kN·m², 地基的刚度系数为 5 000 kN/m³。

图 1 所示问题, 按式(1)得到的控制方程为

$$\left. \begin{aligned} (EI\phi_{,xx})_{,xx} &= -c\phi \\ EI\phi_{,xx}(0, L) &= 0 \\ EI\phi_{,xxx}(0, L) &= 0 \\ EI\phi_{,xxx}(2.5, 26.5) &= -1\,222\,000 \\ EI\phi_{,xxx}(10.5, 18.5) &= -2\,076\,000 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

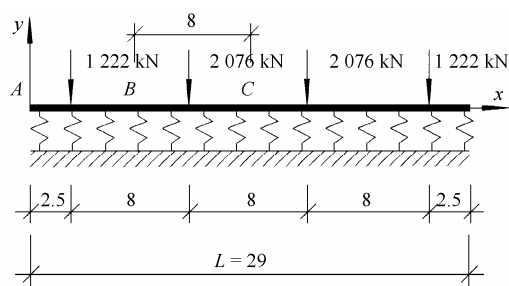


图1 弹性地基梁的荷载作用示意图(单位: m)

Fig.1 Sketch of elastic foundation beam under loads(unit: m)

式中: $c = 3 \text{ m} \times 5\,000 \text{ kN/m}^3 = 15\,000 \text{ kN/m}^2$

按式(11)得到积分“弱”形式为

$$\left. \begin{aligned} & \sum_F \left\{ [\omega_x(x)] \langle EI\phi_{,xx}(x) \rangle + [\phi_x(x)] \langle EI\omega_{,xx}(x) \rangle \right\} + \\ & \sum_{\Omega} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_{,xx} EI\phi_{,xx} dx + \sum_{\Omega} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega c \phi dx = \\ & -\omega(EI\phi_{,xx})_{,x}(2.5) - \omega(EI\phi_{,xx})_{,x}(10.5) - \\ & \omega(EI\phi_{,xx})_{,x}(18.5) - \omega(EI\phi_{,xx})_{,x}(26.5) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

为了方便计算取 16 个单元, 得到弹性地基梁的位移曲线如图 2 所示。梁上 A、B、C 三点处沉降量, 见表 1。为了便于比较, 在表 1 中还列出了其他几种方法^[8]的计算结果(表 1 中的单位为 m)。

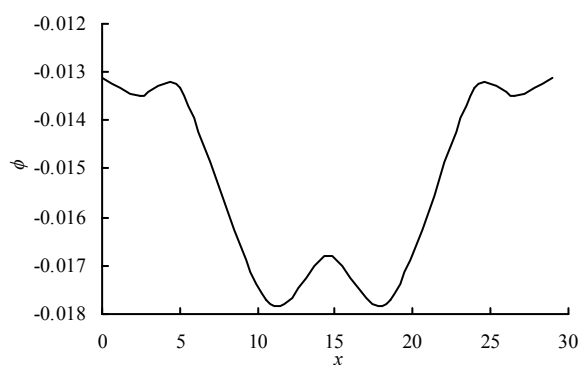


图2 弹性地基梁的位移分布图

Fig.2 Displacement distribution of elastic foundation beam

表1 不同方法得到的 A、B、C 三点沉降量(单位: m)

Table 1 Settlements at the point A, B and C by different methods(unit: m)

计算方法	A	B	C
DGM (16 单元)	-0.013 06	-0.013 80	-0.016 73
节点弹簧法 (16 单元)	-0.012 71	-0.013 90	-0.016 78
虚功原理法 (16 单元)	-0.013 07	-0.013 81	-0.016 75
挠曲线法 (16 单元)	-0.013 07	-0.013 81	-0.016 75

由表 1 可见, DGM 的计算结果与其他传统有限元法的计算结果十分接近, 这表明: 用间断伽辽金法来求解弹性地基梁问题, 是切实可行的, 并具有较高的精度。

3.2 DGM 求解弹性地基梁问题的收敛性分析

如图 3 所示, 用两端自由中央受一集中力的弹性地基梁来分析间断伽辽金法 (DGM) 的收敛性。该弹性地基梁长度为 16 m, 宽度为 3 m, 梁的抗弯刚度为 $1\,545\,700 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$, 地基的刚度系数为 $5\,000 \text{ kN/m}^3$ 。

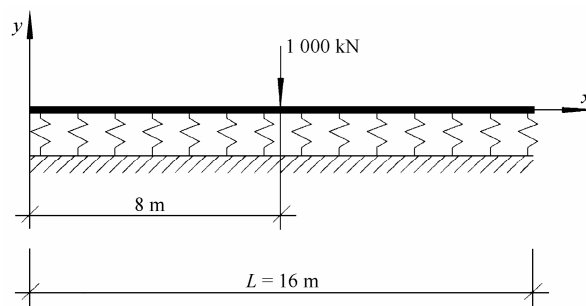


图3 两端自由中央受一集中力时的弹性地基梁

Fig.3 Elastic foundation beam under a middle point load

如图 3 所示问题, 按式(1)得到的控制方程为

$$\left. \begin{aligned} & (EI\phi_{,xx})_{,xx} = -c\phi \\ & EI\phi_{,xx}(0, L) = 0 \\ & EI\phi_{,xxx}(0, L) = 0 \\ & EI\phi_{,xxx}(8) = -1\,000\,000 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

定义两种绝对误差的表达式, 对于绝对误差 1 (L_2):

$$\|\phi - \phi^h\|_{L_2} = \sqrt{\int_{\Omega} (\phi - \phi^h)^2 dx} \quad (16)$$

对于绝对误差 2 (H_1):

$$\|\phi - \phi^h\|_{H_1} = \sqrt{(\int_{\Omega} ((\phi_x - \phi_x^h)^2 + (\phi - \phi^h)^2) dx)} \quad (17)$$

绝对误差的计算值, 如表 2 所示。由表 2 可以看出: 数值解的误差很小, 而且随着单元数的增加

表2 绝对误差计算结果

Table 2 Calculated results of absolute errors

单元数目	绝对误差	
	L_2	H_1
2	0.000 896 51	0.001 217 70
4	0.000 112 38	0.000 218 52
8	$1.005\,6 \times 10^{-5}$	$3.100\,1 \times 10^{-5}$
16	$2.615\,7 \times 10^{-6}$	$4.819\,4 \times 10^{-6}$
32	$2.310\,2 \times 10^{-6}$	$2.544\,7 \times 10^{-6}$

而收敛;这说明用间断伽辽金法(DGM)来计算弹性地基梁问题是十分有效率的。

4 结 论

本文基于间断伽辽金法(DGM)的基本原理,推导出了弹性地基梁四阶微分控制方程的积分“弱”形式,在此基础上编制了相应的计算程序,并进行了数值计算和收敛性分析。计算分析表明:

(1) 用间断伽辽金法(DGM)来求解弹性地基梁问题是切实可行的,并具有较高的精度。

(2) 间断伽辽金法(DGM)数值解的误差很小,而且随着单元数的增加而收敛,这说明用 DGM 来计算弹性地基梁问题是十分有效率的。

值得一提的是,本文运用间断伽辽金法(DGM)对一维的弹性地基梁问题进行数值计算的初步研究中,对 C^0 连续函数的选择所采用的方法,可以方便地推广到二维的弹性地基板以及其他类似的二维和多维问题的分析求解之中去。

参 考 文 献

- [1] REED N H, HILL T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation[R]. Los Alamos: Scientific Laboratory, Report LAUR, 1973: 73—479.
- [2] LESAINT P, RAVIART D A. On a finite element method for solving the neutron transport equation[M]. Mathematical Aspect of Finite Elements in Differential Equations. [S. l.]: Academic Press, 1974: 89—145.
- [3] COCKBURN B, SHU C W. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: the multidimensional case[J]. **Mathematics of Computation**, 1990, 54: 545—581.
- [4] COCKBURN B, SHU C W. The Runge-Kutta local projection P^1 -discontinuous Galerkin method for scalar conservation laws. *Rairo Model*[J]. **Math. Anal. Numer.**, 1991, 25: 337—361.
- [5] BEY K S, ODEN J T. A Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method for high speed flows[C]// AIAA 10th Computational Fluid Dynamics Conference. [S. l.]: Honolulu H I, 1991, 24—27.
- [6] ENGEL G, GARikipati K. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2002, 191: 3 669—3 750.
- [7] 杨敏, 艾智勇. 弹性地基杆系有限元法单元刚度的若干讨论[C]// 第六届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集. 广州: 广东科技出版社, 1998.